連続的非同期式回路理論の諸問題 (情報科学の数学的理論)

木村, 泉

数理解析研究所講究録
123巻 1971年 191-213

連続的非同期式回路理論の諸問題

東工大理　情報科学科　　木　村　　泉

Mullerらが導入した非同期式回路の理論[1,2]は，非同期式電子計算機の論理設計のための道具を提供しよう，という目当てをもつものであったから，それが有限集合の上を走る離散的なシステム変数（主として2値的な）に基づいて組み立てられていたことは，いかにももっともなことであった．しかし彼らの与えた理論的結果は，システム変数の変域に関する上記限定を必らずしも本質的な形で使ってはおらず，むしろそのかなりの部分については，システム変数を一般の位相空間の上を走るものとした方が自然な定式化が得られるのではないか，と思われるふしがあった．そして，このことが事実であることは，すでに[3]においてある程度示した通りである．

本文は二つの目的を有する．才1は，Mullerら[1]の，いわゆるC状態(積算状態)の理論を，ホモトピーふうの構成

を考えることによって，［3］のわくぐみの中に移し植えよう，というこころみについてスケッチふうに述べることである．その才2は，［3］において特にシステム変数の変域としてユークリッド空間を考えたとき，理論がどのように「見える」かについて若干の直観的考察をこころみることである．以下，才2点についてまず論じ，才1点についてはあとから触れることにする．

§1．　ユークリッド空間上の非同期式回路理論

まず準備として，［3］において，基礎となる空間をユークリッド空間であるとした場合に理論がどのような形をとるかを書き出してみることにする．以下しばらく紙巾節約のため敢えて「高飛車」な書き方をするが，次節で直観的説明を与えるので諒とされたい．

<u>定義1.1</u>．　本文において<u>回路</u>Cとは，自然数nと関数$f: E^n \to E^n$の組(n, f)のことである．ただしE^nはn次元ユークリッド空間．$f(z)$をz'と書き，またfを，

$$
(1.1)\quad \begin{cases} z_1' = f_1(z_1, \cdots, z_n), \\ \quad \cdots\cdots \\ z_n' = f_n(z_1, \cdots, z_n), \end{cases}
$$

のように書きあらわす．ここで $z \in E^n$．

注意1.1．　回路は［3］ではある四つ組として定義されているが，本文で論ずる特別の場合においては上のような定義で十分である．以下一々断らないが同様の事情は繰り返しあらわれる．

記号1.1．　$a, b, c \in E$とする．（Eは実数の全体）そのとき $a \leq b \leq c$ または $a \geq b \geq c$ なることを記号 $\langle a, b, c \rangle$ であらわす．また $x, y, z \in E^n$ と $1 \leq i \leq n$ に対し，$\langle x_i, y_i, z_i \rangle$ の代りに $\langle x, y, z \rangle_i$ と書く．さらに，すべての i に対して $\langle x, y, z \rangle_i$ なることを，$\langle x, y, z \rangle$ であらわす．

記号1.2．　以下 $C = (n, f)$ を定義1.1の通りとする．一般に $x, y \in E^n$ に対し，$\langle x, y, x' \rangle$ なることを $x \mathcal{R} y$ であらわす．また $\langle x, y, x' \rangle_i$ なることを $x \mathcal{R}_i y$ と書くことがある．

定義1.2．　関数 $\xi : E \rightarrow E^n$ が C の $\mathcal{R}$列であるとは，任意の有界区間 $I = [a, b]$ に対して $\varepsilon > 0$ が存在し，$t \in I$ にわたって

(i)　ξ は区間 $[t, t+\varepsilon]$ で（各 i ごとに）単調，かつ

(ii)　$\xi(t) \mathcal{R} \xi(t+\varepsilon)$

なることである．

注意1.2. ξが$[t, t+\varepsilon]$で各iごとに単調とは，くわしくは $t \le t_1 \le t_2 \le t+\varepsilon$ とすべてのiに対して $\langle \xi(t), \xi(t_1), \xi(t_2)\rangle_i$ なることを言う．(記号1.1により，$\langle \cdots \rangle_i$ の代りに，"すべてのiに対して"を省いて単に$\langle \cdots \rangle$と書いてもよい)．なお一般に(i)，(ii)から，$t \le t_1 \le t+\varepsilon$ に対して $\xi(t)\,\mathcal{R}\,\xi(t_1)$．

注意1.3. $I=[a, b]$について定まる定義1.2のεを$\varepsilon = e(a, b)$とあらわし，eをξの(一つの)特性時間関数と言う．eはbについて単調非増大，aについて単調非減少と仮定してさしつかえない．

定義1.3. ηを関数$\eta : E \to E^n$とするとき，その集合的極限を$\eta(\infty)$であらわす．すなわち

$$\eta(\infty) = \bigcap_{t_0} \overline{\{\eta(t) \mid t \ge t_0\}}$$

ただし上線は閉包演算をあらわす．$\eta(\infty)$は，ある$t_n \nearrow \infty$なる数列$\{t_n\}$によって$\eta(t_n) \to \alpha$となるαの全体であると言ってもよい．

定義1.4. E^nの部分集合Tがiに関して安定とは，もし$c, d \in E$に対し，$z \in T$にわたって

$$z_i = c \quad \text{かつ} \quad \langle z_i, d, z_i' \rangle$$

であるならば実は$c = d$となることを言う．またTがすべて

のしに関して安定のとき，Tは安定であると言う．

定義 1.5. $\xi: E \to E^n$ がCの許容列であるとは，それがCの解列であり，しかも $\xi(\infty)$ が安定なることを言う．

例 1.1. $n=1$，$f_1(x_1)=1$ とする．（E^1 の元をEの元と同一視し），

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \text{ のとき}, \\ 1 & t > 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

$$\eta(t) = 1 - e^{-t}, \qquad -\infty < t < \infty,$$

$$\zeta(t) = 0, \qquad -\infty < t < \infty,$$

とおくと，ξ，η はCの許容列である．ζ はCの解列ではあるが許容列ではない．

注意 1.4. 解列，許容列の変域をE全体にわたるとしているのは別段本質的なことではなく，単にあとあと記号法上多少便利だからにすぎない．[3]でしているように変域を右半直線 $[0,\infty)$ に限っても話は同じである．

記号 1.3. $u \in S$ に対し，$\xi(0)=u$ となるようなCの許容列の全体を $\mathfrak{X}[u]$ であらわす．また

$$\mathfrak{X}^\infty[u] = \{\xi(\infty) \mid \xi \in \mathfrak{X}[u]\} \quad \text{と書く．}$$

記号 1.4. $x, y \in E^n$ に対し，許容列 ξ（解列 ξ と言っても同じ）と $t_1, t_2 \in E$ が存在して，$\xi(t_1)=x$，$\xi(t_2)=y$，$t_1 \leq t_2$ となるとき，$x \mathrel{\overline{\mathcal{F}}} y$ と書く．

命題1.1. $x\mathcal{F}y$ なるための必要かつ十分な条件は，有限個の点 $x(0), x(1), \cdots, x(\ell)\in E^n$ が存在して

$$x=x(0)\,\mathcal{R}\,x(1)\,\mathcal{R}\cdots\mathcal{R}\,x(\ell)=y$$

となることである．（ただし $\ell\geq 0$）．

定義1.6. C が $u\in E^n$ に関して速度不感とは，$u\mathcal{F}x$ なるすべての $x\in E^n$ に対して $\mathcal{X}^\infty[u]=\mathcal{X}^\infty[x]$ なることである．

定義1.7. C が $u\in E^n$ に関して semimodular とは，$u\mathcal{F}x$, $x\mathcal{R}y$ なるすべての $x, y\in E^n$ について $y\mathcal{R}x'$（すなわち $\langle y, x', y'\rangle$）となることである．

定理（Muller） C において f を連続とするとき，C が $u\in E^n$ に関して速度不感であるための一つの十分条件はそれが u に関して semimodular なることである．

注意1.5. 上定理は，Muller らが[1]に与えたものの，ユークリッド空間上における一つの analogue を与えているものである．[3]には上定理と Muller らの原定理の，いわば topological closure に相当する結果が与えられている．

§2. 解釈と問題点

さて話題を転じて，次のような連立微分方程式を考えてみよう．（ただし $i = 1, 2, \cdots, n$）．

$$(2.1)\qquad dz_i/dt = \varphi_i(z_1, z_2, \cdots, z_n).$$

このようなものは，たとえば電子的素子をつなぎあわせてできる電子回路の挙動をしらべたい，というようなときに出てくるはずのものである．そしてたいていの応用においては，（2.1）の右辺の φ_i は，少なくとも原理的には完全に知られた関数であるとみなして差支えない．

しかしながら，ある場合には，たとえば素子の経年変化に対応して，φ_i の形が時とともに少しずつ変ってゆく，ということも考えられる．その場合は問題が複雑化し，

$$(2.2)\qquad dz_i/dt = \varphi_i(z_1, z_2, \cdots, z_n ; t)$$

と言ったものが必要になってくる．

とは言っても，いきなり（2.2）を扱おうとすると話が複雑化しすぎることが多い．また（2.2）において φ_i が t にどのように依存するかが，そもそも知られていないという場合も十分あり得る．たとえば経年変化の問題などはそのようにとらえた方がむしろ自然であるし，また取り扱おうとして

いる体系の数学的模型自体が近似的で，ある種の制御しがたいパラメータを無視しているために，本来は(2.1)のような式を書き得るはずのところが(2.2)でがまんしなければならなくなっている，というようなことも考えられる．そのような場合は φ_i の t への依存性如何はますます知りがたいものとなる．

そこで，φ_i の形についてある限られた範囲の情報しか得られないとき，その限りで何か言い得るのかを考察してみることは興味ある問題である．いま，その一つの特別の場合として，われわれの方程式が次の形をしているという場合を考察してみよう．

$$(2.3)\qquad dz_i/dt = \alpha_i(t)\,\varphi_i(z_1, \cdots, z_n).$$

ここで α_i，φ_i は十分滑らかとし，φ_i は有界，かつ $\alpha_i \geq 0$，$\int_0^\infty \alpha_i(t)\,dt = \infty$ とする．そして，φ_i ははっきり知られているが，α_i については上記のことしかわからない，としてみるのである．

ここで注意すべきは，α_i が i ごとに個別に与えられていることである．これがもしたまたま $\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \cdots = \alpha_n(t)$ となっていたとすれば，問題はほとんど trivial であると言える．というのは，その場合，方程式(2.3)は，(2.1)の解を“めちゃくちゃに狂った時計”を使って観測

したものに他ならないからである．したがってこの場合われわれは（2.3）であらわされる体系がどこをどのように通って動いて行くかを知っているが，その変化がどの位の速さで起るかは全く知らない，ということになる．一言にして言えば，われわれが知っているのはトラジェクトリであり，そしてそれ以上でもそれ以下でもない．

むしろわれわれが問題にしているのは，α_i が i ごとに異なっている場合である．いわば体系の各構成要素がそれぞれ別の"めちゃくちゃな時計"を持っている場合が問題なのである．もちろんこの場合も，最終的に問題にできるのはトラジェクトリだけであるが，その上時計が"自由化"されている結果として，可能なトラジェクトリが一般に無限に多く生じてくる．体系の構成要素1の時計は，構成要素2の時計より，あるときは速く，またあるときは遅く動くであろう．われわれは，そのようにして生ずる種々のトラジェクトリの全体を，なんとかうまく特徴づけたいと思うのである．

このことを（ある意味で近似的に）おこなうのには，§1の構成が役立つ．いま，（2.3）であらわされるわれわれの体系が，時点 $t=t_0$ において点 $z=z(t_0)\in E^n$ に居たとし，手はじめとして各 i に対して $\varphi_i(z_1,\cdots,z_n)>0$ となっていた，という場合を考えよう．このとき，各 φ_i は点 z

のある近傍$\mathcal{N}$において正の符号をたもつ．（φ_iは十分滑らかだから）．そこで

$$(z_1+\varepsilon_1,\ z_2+\varepsilon_2,\ \cdots,\ z_n+\varepsilon_n)\in\mathcal{N}$$

となるように$\varepsilon_i>0$を選べば，$z=z(t_0)$においてわれわれの体系の各構成要素がしようとしていることは，z_iから$z_i+\varepsilon_i$に向って変化することだと言ってさしつかえない．もっともα_iは不明であるから，その変化の速さはiごとにまちまちであり，どのiについてz_iが一番早く$z_i+\varepsilon_i$に達するかはもちろんわからない．しかし仮定$\int_0^\infty\alpha_i(t)dt=\infty$によって，そのようなことは遅かれ早かれどれかの$i$について起るであろう．

さて一般には，φ_iの中には正のものも負のものも0のものもあるであろう．そのときはφ_iのうち0でないものが一定符号をたもつような点の範囲を$\mathcal{N}$とすればよい．そして点$(z_1+\varepsilon_1,\cdots)\in\mathcal{N}$の代りに点

$$(z_1+\sigma_1\varepsilon_1,\ z_2+\sigma_2\varepsilon_2,\ \cdots,\ z_n+\sigma_n\varepsilon_n)\in\mathcal{N}$$

を考えれば一応上と同様のことが言える．ここでσ_iは，φ_iの正，負，零に応じて1，-1，0とする．またひきつづき$\varepsilon_i>0$であり，z_iは今度は$z_i+\sigma_i\varepsilon_i$に向って変化するのである．

ところでこの$z_i+\sigma_i\varepsilon_i$は，（$\varepsilon_i$をどうとるかの自由度

$\xi(t)_i$はたしかに単調に増し，また減ってゆく．また(2.3)においては条件$\int_0^\infty \alpha_i(t)dt=\infty$によって，$z_i$の値がいくらでも大きく(または小さく)なるが，許容列でも$\xi(\infty)$の安定性によって，$\xi(t)_i$の値はいくらでも大きく(または小さく)なる．よってこのとき，(2.3)の解と(2.4)の許容列の間の対応は完全である．

問題は空間のどこかで$\varphi_i=0$となるときである．われわれの体系がそのような点の一つにやってきたとする．ここでもし全部のjについて$\varphi_j=0$であるならば，(2.3),(2.4)のどちらから見ても，z_iまたは$\xi(t)_i$はもはやふえも減りもしないから，やはり対応は完全である．だがもしあるjについては$\varphi_j\neq 0$であるとすると，(2.3)においてz_jはφ_jの正負に応じて，やがて増加しはじめたり減少しはじめたりする．すると一般にはφ_iも，やがて0でなくなるであろう．そしてそれに応じてz_iも，ふたたび動き出す．この事情は対応する(2.4)の$\xi(t)_i$についても全く同じであるが，ただz_iまたは$\xi(t)_i$の動き出しようが必ずしも同じでない．(2.3)では，ある$z=z(t_0)$で$\varphi_i(z)=0$であり，しかもどんなに小さく$\varepsilon>0$をとっても$z(t_0+\varepsilon)_i\neq z(t_0)_i$となる，というようなことがあり得るが，(2.4)では定義2.5の条件(ii)によって，もし$\xi(t_0)_i=\xi(t_0)'_i$であれば

を別とすれば）zの関数としてさだまると考えてよい．その関数をf_iであらわし，§1の定義1．1にならって

$$(2.4)\quad \begin{cases} z_1' = f_1(z_1, \cdots, z_n), \\ \quad\cdots\cdots \\ z_n' = f_n(z_1, \cdots, z_n), \end{cases}$$

と書くことにすれば，われわれの“めちゃくちゃな時計”をもつ体系について使用できる情報は一応ことごとく（2.4）式に含まれていると考えられる．なお明らかにf_iは連続と仮定して差支えない．

ここで（2.4）を§1の（1.1）とみたとき，もし可能な許容列（定義1.5）の全体が，われわれの体系の可能なトラジェクトリ（をパラメタ表示であらわしたもの）の全体に一致していたとすれば大変ぐあいがよい．このことは次の二つの点において成立しないが，しかしある意味で近似的には成立つと言える．

才1点がもっとも重要である．もし（2.3）において$\varphi_i = 0$になることが決してなかったとすれば，φ_iの符号は全空間にわたって一定である．したがってそのとき，（2.3）の解においては，α_iの如何にかかわらずz_iの値はつねに増し，または減じてゆくことになる．一方このとき，定義1.2の條件(ii)によって，われわれの許容列ξにおいて

ある$\varepsilon>0$に対し，$t_0\leq t\leq t_0+\varepsilon$にわたって$\xi(t)_i=\xi(t_0)_i$でなければならない．直観的に言えば，(2.4)では素子iが動き出せ，と言われてから本当に動き出すまでに，微少な，しかし0でない時間がかかるのである．このように(2.4)は，いわばまさつの多い体系に適し，エネルギー損失の少ない体系には必らずしもふさわしくないのである．

才2点として，われわれのξが連続関数とは限らない，ということが挙げられる．例1.1のξがそうであるように，許容列は不連続点を含むかもしれない．これに対し，(2.3)の解は，α_i，φ_iを十分滑らかとしている関係上必然的に連続関数となる．この不一致は実は意識的に仕組まれたものであって，[3]において時間軸を連続的とし，しかも変数x_iの変域を離散的集合とした特別の場合を許容するのに役立つ．ただし定義1.2の条件(ii)によって，そうやたらな不連続性は出て来ないようにしてある．この問題点は定義1.2において条件(i)の代りに「ξは連続」なる要請を置くことによって解消できよう．ただしそのようにした場合，[3]のわく組が[1,2]のそれの真の拡張でなくなってしまうことは覚悟しなければならない．

なお許容列において$\xi(\infty)$の安定性が要請されている，という事実は条件$\int_0^\infty\alpha_i(t)dt=\infty$と，ある関連を有する．

その一端はすでに上で見た通りであるが，このことは次のように考えればさらに一般的に裏づけられる．$z(t)$ を (2.3) の解とするとき，$Z(\infty)$ とは，われわれの体系が最後に落ち込む動作の環であると言える．ただし環とは言っても $Z(\infty)=\phi$ なることもあり得る．実際，さきに全空間にわたって $\varphi_i(z)>0$ となる場合を考えたが，その場合は $Z(\infty)=\phi$ となる．また $Z(\infty)$ が1点 w のみから成るということもある．その場合，w は体系がたどりつく安定点ということになる．また $Z(\infty)$ が2個以上の元を含むのであれば，体系はついにはある繰り返し運動の中に落ち込むのである．ただしやかましく言うと，いずれの場合においても，$z(t)$ は $Z(\infty)$ の中へ本当に落ち込むとは限らない．単に $Z(\infty)$ に無限に近づいて行くだけかもしれない．

それはともかくとして，$z(t)$ が $Z(\infty)$ の十分近くまで来たときわれわれの体系の才 i 要素が受ける“駆動力”$\alpha_i(t)\varphi_i(z(t))$ は，φ_i，α_i の連続性からして，$Z(\infty)$ の中での“駆動力”に非常に近いと考えられる．しかるにいま $Z(\infty)$ が安定でなかったとすれば，$Z(\infty)$ は空でなく，またある i に対して $Z(\infty)\ni x$ の i 成分 x_i は一定 $(=c)$ であり，かつ $f_i(x)=x_i+\sigma_i\varepsilon_i$ に対してある d が存在して，$f_i(x)\geq d>c$ と $f_i(x)\leq d<c$ のどちらか一方がつねに成

り立っている，ということになる．ε_i の取り方から明らかに，そのとき $\beta>0$ が存在して $x\in Z(\infty)$ に対し $|\varphi_i(x)|\geq\beta$ となる．とすれば $|\int\alpha_i(t)\varphi_i(z(t))dt|\gtrsim\beta\int\alpha_i(t)dt=\infty$ となり，$z(t)_i\to c$ となるはずがないことになる．よって $Z(\infty)$ は安定である．すなわち（2.3）の解は（2.4）の許容列となるはずである．

逆に（2.4）の許容列 ξ が与えられたとするとき，α_i を（条件 $\int\alpha_i(t)dt=\infty$ をみたさないでよいとした上で）適当にとり，かつ ξ を連続とすれば，ξ が（2.3）の解となることは上に論じたところから明らかである．しかるにもし $\xi(t)_i\longrightarrow c$ とならないのであれば，（つまり $\xi(t)_i$ がいくらでも動くのであれば）$\int\alpha_i(t)\cdot|\varphi_i(\xi(t))|dt=\infty$ となる．だが φ_i は有界だから $\int\alpha_i(t)dt=\infty$ となる．

一方 $\xi(t)_i\longrightarrow c$ となるのであれば $\varphi_i(\xi(t))$ には時とともにいくらでも小さい値が出て来ることになる．（これまで特にことわらなかったが，f_i を作るときは ε_i を十分大きくとる．そうすれば上のことは正しい．）φ_i は連続だからその小さい値の近くでは φ_i の値はやはり小さい．そこで ξ がそのような点の付近に来たときだけ α_i を大きくしてやると，（2.3）の解は ξ から少しだけかわるが，しかしその変り方はごく小さく，しかもそうすることによって $\int\alpha_i(t)dt$

$=\infty$ となるようにできると考えられる．（この話は ξ とぴったり同じ解の存在を保証していない．その意味でこのことを才3の問題点に数えるべきかもしれない．）

以上，§1の構成を微分方程式（2.3）に対応させることによって解釈し，またこの対応に存する問題点について論じたが，§1を特別の場合として含む[3]の構成は元来はMullerらの理論[1, 2]を形式の面から観察することによって得られたものであり，はじめから（2.3）を考えて導入されたものではない．しかしこのような対応がつくという事実は，Mullerらの理論と（2.3）の間に単なる偶然の一致以上の関連があることを暗示しているように思われる．

なお言うまでもなく，以上の話は「説明」であって，「証明」と言えるようなものは一切含んでいない．もし（2.3）の解の全体と（2.4）の許容列の全体が同じであることを証明できれば面白いが，上記二つの問題点がある以上それは原理的に不可能である．許容列の定義を適当に変更することにより，上記のことを証明可能にすることは，興味ある将来の問題である．

§3. ユークリッド空間上のC状態

Mullerら[1]はsemimodularな回路（彼らの意味での）についてC状態なるものを導入し，これが非同期式回路の解析と設計に有効であることを示した．またこの手法を利用した研究が[4, 5, 6]でおこなわれている．

本節の主題は，このC状態の理論と同じようなものをユークリッド空間の中で作れないか，考えてみることである．ただし本節の話は中間報告で，たとえばC状態の集合の束論的性質を調べることなどは今後の問題として残っている．なおユークリッド空間を考えることは本質的ではない．ここでも注意1.5におけると同様，Mullerのもとの理論とユークリッド空間に関する理論のtopological closureに相当するものを，[3]のわく組の中で与えることができる．

Mullerら[1]のC状態の理論を一言にして言えば，与えられたsemimodular回路からある半順序集合を構成し，もとの回路の許容列を，この半順序集合の中に値をもつ単調増大かつある意味で極大な時間関数の，ある定まった写像による像として特徴づけようとするものである．Mullerらの半順序集合は非負整数を成分とする数ベクトルから成り，順序は成分ごとの大小関係によって導入される．そしてその数ベクトルはいわば回路の各素子に計数器をつけ，動作開始以来そ

れらの素子が何回動いたかを数えて書き並べたものである，ということができる．

ところで，見方を変えるとMullerらのC状態は，許容列をある一定時刻までで打ち切ったもののなす集合の，ある同値分類による同値類とみなし得ることがわかる．ユークリッド空間上でC状態を定義するには，この考えをもちいる．

記号3.1. $a, b, c, d \in E$ に対し，$\langle a, b, c\rangle$ かつ $\langle a, c, d\rangle$ なることを $\langle a, b, c, d\rangle$ であらわす．$a, b, c, d \in E^n$ についても同様とする．

定義3.1. 関数 $\Xi : E^2 \to E^n$ が $C = (n, f)$ の上の準ホモトピー(quasi-homotopy)であるとは，任意の区間 $I = [a, b]$ に対して定数 $\varepsilon = \varepsilon(a, b) > 0$ が，また（一様に）$\delta > 0$ が存在して，次の事実が成り立つことである．すなわち，任意の $t \in I$，$-\infty < p < \infty$，$0 \leq \delta t \leq \varepsilon$，$0 \leq \Delta t \leq \frac{\varepsilon}{2}$，$|\Delta p| \leq \delta \cdot \Delta t$ に対し

条件3.1.1. $\langle \Xi(t, p), \Xi(t+\Delta t, p+\Delta t),$
$\Xi(t+\delta t-\Delta t, p+\Delta p), \Xi(t+\delta t, p)\rangle$

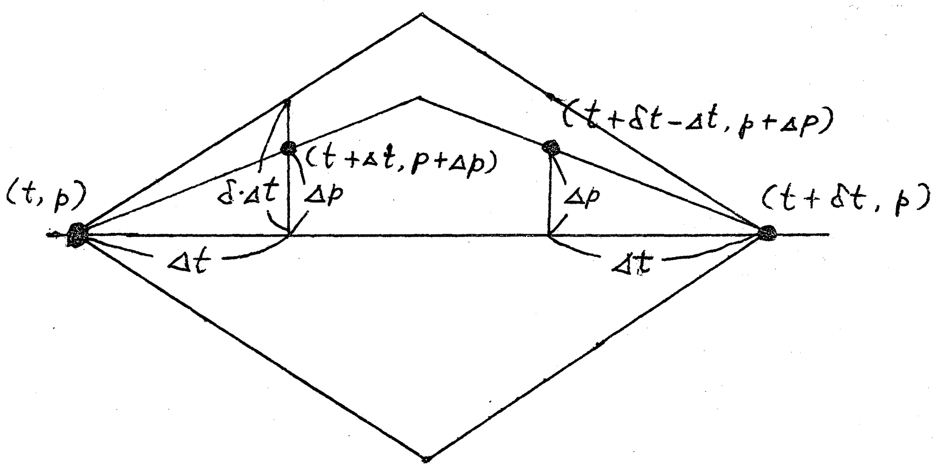
が成り立つ．

また Ξ がホモトピー(homotopy)であるとは，上記前提のもとに，条件3.1.1のほか更に

条件3.1.2. $\Xi(t, p)\, \mathcal{R}\, \Xi(t+\varepsilon, p)$

が成り立つことを言う．ここでも注意1.3における と同様のことが言える．

注意3.1．上記構成は位相幾何学におけるホモトピーの概念をいくぶん連想させるので，上のように名づけた．なお條件3.1.1の意味につき下図参照．



記号3.2．αを関数$\alpha:[0,\ell]\to E^n$とするとき，関数$\xi_\alpha:E\to E^n$を

$$\xi_\alpha(t)=\begin{cases}\alpha(0) & t<0\ \text{のとき},\\ \alpha(t) & 0\le t\le \ell\ \text{のとき},\\ \alpha(\ell) & t>\ell\ \text{のとき},\end{cases}$$

によって定義する．また$\ell_\alpha=\ell$と書く．

記号3.3．$u\in E^n$とする．$\ell\ge 0$と，ある$\xi\in\mathbb{X}[u]$に対し

$$\alpha(t)=\xi(t)\qquad(0\le t\le\ell)$$

となるような$\alpha:[0,\ell]\to E^n$の全体を$\Gamma[u]$であらわす．

$\alpha, \beta \in \Gamma[u]$につき，$l_\alpha \leq l_\beta$，かつすべての$t \in [0, l_\alpha]$に対して$\alpha(t)=\beta(t)$のとき，$\alpha \leq \beta$と書く．$\leq$は順序である．

<u>定義3.2.</u>　$\Gamma[u]$を上の通りとする．$\Gamma[u]$の2元α，βに対し，α <u>q.hom</u> βであるとは，準ホモトピーΞとp_0，p_1が存在して

$$\Xi(t, p_0) = \xi_\alpha(t), \quad \Xi(t, p_1) = \xi_\beta(t)$$
$$(-\infty < t < \infty)$$

となることである．特にΞをホモトピーであるようにとれるとき，α <u>hom</u> βであると言う．

<u>命題3.1.</u>　関係 <u>hom</u>，<u>q.hom</u> は$\Gamma[u]$の上の同値関係である．

<u>命題3.2.</u>　$\alpha \in \Gamma[u]$と準ホモトピーΞにつき，あるp_0に対して　$\Xi(t, p_0) = \xi_\alpha(t)$　$(-\infty < t < \infty)$　であるなら，$t \geq l_\alpha$，$|p - p_0| \leq \delta\cdot(t - l_\alpha)$に対し$\Xi(t, p) = \alpha(l_\alpha)$，また$t \leq 0$，$|p - p_0| \leq -\delta\cdot t$に対し$\Xi(t, p) = \alpha(0)$が成り立つ．

<u>系3.2.1.</u>　$\alpha, \beta \in \Gamma[u]$に対し，$\alpha$ <u>q.hom</u> β なら$\alpha(0) = \beta(0)$，かつ$\alpha(l_\alpha) = \beta(l_\beta)$．

<u>定義3.3.</u>　$\xi : E \to E^n$が<u>有界作動</u>であるとは，任意の有界区間$I = [a, b]$に対して$\varepsilon > 0$が存在し，$t \in I$に

わたってξが区间$[t, t+\varepsilon]$で（各iごとに）単調なことである．$\varepsilon = e(a, b)$はbについて単調非増大，aについて単調非減少と仮定してよい．定義1．2および注意1．3参照．さて有界作動のξに対し，集合$Span(\xi, i, t)$を

$$\bigcap_{0<\delta\leq\frac{\varepsilon}{2}} B(\xi(t-\delta)_i, \xi(t+\delta)_i)$$

に等しいものと定義する．ただし$B(a, b)$は$a\leq b$なら区間$[a, b]$を，$a>b$なら$[b, a]$をあらわす．またεは

$$\varepsilon < e(t-\frac{\varepsilon}{2}, t+\frac{\varepsilon}{2})$$

となるよう十分小さくとる．（それはつねに可能である．またεを小さく取りなおすことは定義に影響しない．）

<u>定義3．4．</u> ξを上の通りとし，順序集合C_i^ξを

集合：$\{(\alpha, t) \mid -\infty < t < \infty,\ \alpha\in Span(\xi, i, t)\}$，

順序：(i) $t_1 < t_2$なら$(\alpha, t_1) < (\beta, t_2)$，

(ii) $\alpha, \beta\in Span(\xi, i, t)$，$\alpha\neq\beta$のとき

$$(\alpha, t) < (\beta, t) \Leftrightarrow \langle \xi(t-\frac{\varepsilon}{2})_i, \alpha, \beta, \xi(t+\frac{\varepsilon}{2})_i \rangle$$

によって定義する．εは上記の通り．

<u>命題3．3．</u> C_i^ξは全順序集合である．

<u>定義3．5．</u> ξ, ηを定義3．3の通りとする．ξ <u>sim</u> ηであるとはC_i^ξとC_i^ηの間の関係$\Gamma_i \subseteq C_i^\xi \times C_i^\eta$であって次の條件3．5．1～3をみたすものが各$i$ごとに存在すること

である．

<u>条件 3.5.1.</u> Γ_i は次の意味で順序を保存する．

$$[(\alpha, t), (\beta, u)] \in \Gamma_i \ \& \ [(\alpha_1, t_1), (\beta_1, u_1)] \in \Gamma_i$$
$$\& \ (\alpha, t) < (\alpha_1, t_1) \ \& \ (\beta, u) > (\beta_1, u_1)$$
$$\Rightarrow \Big[\ \forall [(\alpha_2, t_2), (\beta_2, u_2)] \in C_i^{\xi} \times C_i^{\eta},$$
$$(\alpha, t) \leq (\alpha_2, t_2) \leq (\alpha_1, t_1) \ \& \ (\beta, u) \geq (\beta_2, u_2) \geq (\beta_1, u_1)$$
$$\Longrightarrow \ [(\alpha_2, t_2), (\beta_2, u_2)] \in \Gamma_i \ \Big].$$

<u>条件 3.5.2.</u> Γ_i は次の意味で双方向に網羅的である．

$$\forall (\alpha, t) \in C_i^{\xi}, \ \exists (\beta, u) \in C_i^{\eta}, \ [(\alpha, t), (\beta, u)] \in \Gamma_i$$
$$\& \ \forall (\beta, u) \in C_i^{\eta}, \ \exists (\alpha, t) \in C_i^{\xi}, \ [(\alpha, t), (\beta, u)] \in \Gamma_i.$$

<u>条件 3.5.3.</u> Γ_i は次の意味で値を保存する．

$$\forall [(\alpha, t), (\beta, u)] \in \Gamma_i, \ \alpha = \beta.$$

<u>命題 3.4.</u> 関係 <u>sim</u> は同値関係である．

<u>命題 3.5.</u> $\alpha, \beta \in \Gamma[u]$ に対し，α <u>g.hom</u> β なら ξ_α <u>sim</u> ξ_β．

<u>定理 2.</u> $\alpha, \beta \in \Gamma[u]$ に対し，α <u>g.hom</u> β，$\alpha \leq \beta$ かつ $l_\alpha < l_\beta$ なら，$l_\alpha \leq t \leq l_\beta$ に対して $\beta(t) = \alpha(l_\alpha)$．

<u>系.</u> 関係 <u>g.hom</u>，ひいては <u>hom</u> は，$\Gamma[u]$ の上の関係 $\leq$ と両立する．

記号3.4. $\Gamma[u]$の，関係homによる同値類の全体を$C[u]$であらわす．$C[u]$においても，$\Gamma[u]$の順序から自然に導かれる順序を考えて，これを$\leq$であらわす．

文献

1.D.E. Muller and W.S. Bartky, A Theory of Asynchronous Circuits. In Proceedings of an International Symposium on the Theory of Switching, Vol.29, Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, pp.204-243, Harvard University Press, 1959.

2.R.E.Miller, Switching Theory, Vol.II, Chapter 10, John Wiley, New York, 1965.

3.I.Kimura, Space-Continuous Time-Semicontinuous Theory of Speed-Independent Asynchronous Circuits. Submitted for publication, preprint obtainable upon request from the author.

4.W.S.Bartky, A Theory of Asynchronous Circuits III, Report No.96, University of Illinois, Digital Computer Laboratory, January 1960.

5.J.H.Shelly, The Decision and Synthesis Problems in Semi-Modular Switching Theory, Report No.88, University of Illinois, Digital Computer Laboratory, May 20, 1959.

6.M.Hattori and H.Noguchi, Synthesis of Asynchronous Circuits, J. Math. Soc. Japan, Vol.18, No.4, pp.405-423, 1966.